المورفيزم البولياني ومورفيزم الشبكة:

ب- المورفيزم البولياني من A في B يحقق ما يلي

$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ $\quad$ $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

مما وجدنا مورفيزم شبكة وبالأحرى عند التشابه متزايد بينما مورفيزم الشبكة بين جبرين بوليانين ليس بالضرورة مورفيزم بولياني (من الممكن ان يتحقق)

مثال:

لتكن $f: P(E) \to P(E)$ معرف بالشكل التالي $f(x) = X \cup X_0$ حيث X_0 مجموعة جزئية غير خالية من E ثابتة

$f(X \cup Y) = (X \cup Y) \cup X_0 = (X \cup X_0) \cup (Y \cup X_0) = f(X) \cup f(Y)$

$f(X \cap Y) = (X \cap Y) \cup X_0 = (X \cup X_0) \cap (Y \cup X_0) = f(X) \cap f(Y)$

إذن f هو مورفيزم شبكي

$f(E) = E \cup X_0 = E$

إذن f يحافظ على الواحد

$f(\phi) = \phi \cup X_0 = X_0$

أي أن f لا يحافظ على الصفر

$f(C_X) = C_X \cup X_0$

$\neq \quad C_{f(X)} = C_{X \cup X_0} = C_X \cap C_{X_0}$

إذن f ليس مورفيزم بولياني

مبرهنة:

إن القضيتين التاليتين متكافئتان:

① f مورفيزم بولياني من A في B

② f مورفيزم شبكة بحيث يكون $f(0) = 0$ $\quad$ $f(1) = 1$

البرهان:

a ⇐ b واضح

b ⇐ a

من أجل أي x من A فإن

$$\left.\begin{aligned} x \wedge x' = 0 &\Rightarrow f(x \wedge x') = f(0) \Rightarrow f(x) \wedge f(x') = 0 \\ x \vee x' = 1 &\Rightarrow f(x \vee x') = f(1) \Rightarrow f(x) \vee f(x') = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

ومنه نستنتج أن f مورفيزم بولياني

مبرهنة:

إذا كان f مورفيزم تام للشبكة فإن f يكون مورفيزم بولياني:

البرهان:

لتكن $y \in B$ اختيارية ⇐ يوجد $x \in A$ بحيث تكون $y=f(x)$ من A يكون $0 \le x \le 1$ وبما أن f متزايد $f(0) \le f(x) \le f(1)$ (لأنه متزايد ويحافظ على الترتيب) ⇐ $f(0) \le y \le f(1)$

وهذا محقق من أجل أي $y \in B$ ومنه نستنتج أن $f(0)=0$, $f(1)=1$

وبالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يكون f مورفيزم بولياني

ملاحظة:

مورفيزم الشبكة المتباين ليس بالضرورة يكون مورفيزم بولياني

مثال:

$D(6)$ شبكة من $D(30)$ ، إن التطبيق الإدخال التباينى من $D(6)$ في $D(30)$ يكون متباين ولكنه ليس مورفيزم بولياني

إذن i ليس مورفيزم بولياني لأنه لا يحافظ على الواحد $i(6)=6$ والتي ليست الواحد في المستقر (التعويض في العنصر الأكبر: إذن 6 عنصر أكبر في $D(6)$ وصورته في المستقر 6 والتي ليست أكبر في المستقر)

جبر الحلقات البوليانية:

لتكن (A_i) أسرة من الحلقات البوليانية، يمكن أن نعرف في مجموعة الجداء $A=\prod_I A_i$ عملية الجداء $(x_i)(y_i)=(x_iy_i)$ بسهولة يمكن أن نثبت أنه يمكن بناء حلقة بوليانية في A حيث

$$(x_i)\vee(y_i)=(x_i\vee y_i)$$

$$(x_i)'=(x_i')$$

$$(x_i)+(y_i)=(x_i)(y_i)'\vee(x_i)'(y_i)$$

$$=(x_iy_i')\vee(x_i'y_i)$$

يمكن أن نعرف الحلقة البوليانية A^n (حيث n عدد طبيعي مختلف عن الصفر) انطلاقاً من الحلقة البوليانية

مثال:

إذا كانت $U=\{0,1\}$ فإن U^2 تكون حلقة بوليانية مؤلفة من أربعة عناصر

(1,1)

(0,1) (1,0)

(0,0)

يجب أن يكون $(1,0)\le(0,0)$

$0\le 0$

$1\le 0$

ملاحظة:

علاقة الترتيب المعرفة في حلقة الجداء هي ترتيب الجداء الكارتيزي

$$(x_i)\le(y_i)\Leftrightarrow(x_i)(y_i)=(x_i)\Leftrightarrow(x_iy_i)=(x_i)$$

$$\Leftrightarrow x_iy_i=x_i \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow x_i\le y_i \quad \forall i$$

المرشحات والمثاليات:

تذكرة:

لقد رأينا المرشحات والمثاليات في الشبكة في الفصل السابق فكل ما ورد سابقاً يكون صحيحاً في جبر بول A سنلخص هنا التعاريف والخواص الأساسية

المرشح: هو مجموعة جزئية من A تحقق ما يلي

a) إذا كانت $x \in F$ و $y \geq x$ فإن $y \in F$

b) إذا كانت $x, y \in F$ فإن $xy \in F$

c) $1 \in F$

d) الشرط المهم $0 \notin F$ وإذا كانت F مرشحة فعلية أي أن $A \neq F$

المرشحة الأساسية المولدة بالعنصر a هي

$$F_a = \{x \in A ; x \geq a\}$$

ملاحظات:

$F_a = [a, 1]$ $\qquad$ $F_a = A \vee a = \{x \vee a ; x \in A\}$

$$x \in F_a \Rightarrow x \geq a \Rightarrow x = x \vee a \in A \vee a$$

$$y \in A \vee a \Rightarrow \exists x \in A ; y = x \vee a \geq a \Rightarrow y \in F_a$$

المرشحة المولدة بالمجموعة الجزئية G من A هي

$$F_G = \{x \in A ; x \geq a_1, a_2 \cdots a_n ; \forall i \; a_i \in G\}$$

تدعى المجموعة A متوافقة إذا كانت F_G مرشحة فعلية

a) إذا كانت $x \in I$ و $y \leq x$ فإن $y \in I$

b) إذا كانت $x, y \in I$ فإن $x \vee y \in I$

c) $0 \in I$

d) الشرط المهم $1 \notin I$ إذا وفقط إذا كانت I مثالية فعلية

المثالية الأساسية المولدة بالعنصر a

$$I_a = \{x \in A , x \leq a\} = [0, a] = Aa = \{xa ; x \in A\}$$

المثالية المولدة بالمجموعة الجزئية G من A هي

$$I_G = \{x \in A ; x \leq a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n \; \forall i \; a_i \in G\}$$

تدعى G $\vee$ متوافقة إذا كانت I_G مثالية فعلية

مثاليات الشبكة ومثاليات الحلقة:

لقد رأينا سابقاً تعريف المثالية في الشبكة أما في الحلقة التبديلية فإن المثالية تعرف كما يلي

مثالية J في الحلقة البولية A هي مجموعة جزئية غير خالية من A تحقق ما يلي

a) J زمرة جزئية جمعية من A

b) إذا كانت $x \in J$ ، $a \in A$ فإن $ax \in J$

ملاحظة:

إن مفهوم المثالية الجبري للحلقة A باعتبار A شبكة هو نفسه مفهوم المثالية باعتبار A حلقة

البرهان:

إذا كانت I مثالية بمعنى الشبكة فإنه

a) نفرض أن $x \in I$ ، $y \in I$ ⟸ $x+y=(xy')\vee(x'y)$

$xy' \le x \Rightarrow xy' \in I$

$x'y \le y \Rightarrow x'y \in I$ $\Big\} \Rightarrow x+y=(xy')\vee(x'y) \in I$

وبالتالي مغلقة بالنسبة للجمع (الجبري) فإن I زمرة جزئية جمعية من A

b) ليكن $x \in I$ ، $a \in A$ فإن $ax \le x$ ⟸ $ax \in I$ ومنه فإن I هي مثالية بمفهوم الحلقة

العكس:

a) إذا كانت $x \in J$ و $y \le x$ ⟸ $yx = y$ ⟸ $y = yx \in J$

b) إذا كانت $x \in J$ و $y \in J$ ⟸ $x \vee y = x + y + xy$ $\in J$ (لأن J زمرة جزئية جمعية من A)

c) $0 \in J$ (لأن J زمرة جمعية جزئية من A)

وبالتالي فإن J مثالية بمفهوم الشبكة وعندئذ نستنتج أن نستخدم هذه المطابقة بين مفهومي المثالية

الثنوية بين المرشحات والمثاليات:

لقد رأينا سابقاً بأنه إذا كانت G مجموعة جزئية من حلقة بولية A فإن

$G' = \{x' ; x \in G\} = \{x \in A ; x' \in G\}$

ومنه نستنتج ما يلي

مبرهنة:

I مثالية يكافئ I' مرشحة

I مثالية فعلية يكافئ I' مرشحة فعلية

I مثالية رئيسية تساوي A_a يكافئ I' مرشحة رئيسية تساوي $A \vee a'$

I مثالية مولدة بـ G يكافئ I' مرشحة مولدة بـ G'

البرهان:

بفرض أن I مثالية. لتكن $x \in I'$ و $y \geq x$ ⇐ $x' \in I$ و $y' \leq x'$ ⇐ $y' \in I$
⇐ $y \in I'$

لتكن $x \in I'$ و $y \in I'$ ⇐ $x' \in I$ و $y' \in I$ ⇐ $x' \vee y' \in I$ ⇐ $(xy)' \in I$
⇐ $xy \in I'$

$0 \in I$ ⇐ $0' \in I'$ أي $1 = 0'$ وبالتالي فإن I' مرشحة في A .

وبطريقة مشابهة نجد أنه إذا كانت I' مرشحة فإن I مثالية

• I مثالية فعلية ⇐ $1 \notin I$ ⇐ $0 \notin I'$ ⇐ I' مرشحة فعلية

• I مثالية أساسية مولدة بـ a ⇔ $\forall x \in I$ فإن $x \leq a$ ⇔ $\forall x' \in I'$

فإن $x' \geq a'$ ⇔ I' مرشحة مولدة بـ a'

إذا كانت $I = I_G$ فإن $x \in I'$ يكافئ $x' \in I$ (حيث $x' \leq a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ ،

حيث $a_i \in G$ ⇔ $a_i' \in G'$ و $x \geq a_1' a_2' \dots a_n'$ ⇔ $I' = I_{G'}$

عدد المرشحات والمثاليات المختلفة:

لتكن A حلقة بوليانية من المعروف أنه عدد عناصر مرشحات (أي مرشحات فعلية أو عادية)

وإن كل مرشحة فعلية تكون محتواة في مرشحة:

مبرهنة:

إذا كانت f مرشحة فعلية فإن الشرطين التاليين متكافئين

a) f عظمى مرشحة

b) من أجل أي $x \notin f$ فإن $x' \in f$

البرهان:

$a \Leftarrow b$

لنفرض أن f مثالي وسطي و $x \notin f$ في البرهنة السابقة

f مثالي وسطي $\Leftarrow$ إذا كان $x \notin f$ فإنه يوجد $y \in f$ بحيث يكون $x \wedge y = 0$

توجد $y \in f$ بحيث يكون $xy = 0$ $\Leftarrow$ (بتحديده) $y \leq x'$ $\Leftarrow$ (f وسطي) $x' \in f$

$b \Leftarrow a$

نفرض أن $x \notin f$ فإن $x' \in f$ أي $xx' = 0$ بالاعتماد على نفس البرهنة المذكورة سابقاً يكون f مثالي وسطي

مبرهنة:

يكون الجبر الجزئي f من A مثالي وسطي إذا وفقط إذا كان تابع المميز χ تشاكل جبري بولياني من A في U

البرهان:

لتكن f مثالي وسطي فإن تابع المميز

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in f \\ 0 & \text{if } x \notin f \end{cases}$$

يكون تشاكل بولياني

$$\forall x, y \in A, \quad \chi(xy) = \begin{cases} 1 & \text{if } xy \in f \\ 0 & \text{if } xy \notin f \end{cases} \Rightarrow \chi(xy) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in f,\ y \in f \\ 0 & \text{if } x \notin f \ \& \ y \in f \\ & x \in f \ \& \ y \notin f \\ & x \notin f \ \& \ y \notin f \end{cases}$$

$$\Rightarrow \chi(xy) = \begin{cases} 1 & \text{if } \chi(x) = 1 \quad \chi(y) = 1 \\ 0 & \text{if } \chi(x) = 0 \quad \chi(y) = 1 \\ & \chi(x) = 1 \quad \chi(y) = 0 \\ & \chi(x) = 0 \quad \chi(y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \chi(xy) = \begin{cases} 1 & \text{if } \chi(x)\chi(y) = 1 \\ 0 & \text{if } \chi(x)\chi(y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$$

$\forall x \in A \; ; \; \gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in F \\ 0 & \text{if } x \notin F \end{cases} \Rightarrow \gamma(x') = \begin{cases} 1 & \text{if } x' \notin F \\ 0 & \text{if } x' \in F \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma(x)' = \begin{cases} 1 & \text{if } \gamma(x) = 0 = 1' = (\gamma(x))' \\ 0 & \text{if } \gamma(x) = 1 = 0' = (\gamma(x))' \end{cases} \Rightarrow (\gamma(x))' = \gamma(x')$

وبالتالي γ هو مورفيزم بولياني

العكس:

نفرض أن التابع المميز (γ هو مورفيزم بولياني) ولنبرهن أن F عظمى ومرشحة

$\gamma(1) = 1 \xRightarrow{\text{حسب تعريف } \gamma} 1 \in F$

~~$\gamma(0) = (\gamma(1))' = \dots \Rightarrow 0 \notin F$~~

$\gamma(0) = 0 \xRightarrow{\text{لأن } \gamma \text{ مورفيزم بولياني}} 0 \notin F$

نفرض أن $x \in F$ و $y \geq x$ فإن $\gamma(x) = 1$ و $\gamma(y) \geq \gamma(x) \Rightarrow \gamma(y) = 1 \Rightarrow y \in F$

نفرض أن $x, y \in F$ فإن

$\gamma(x) = 1 \quad \gamma(y) = 1$

$\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y) = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow xy \in F$

ومنه نستنتج أن F مرشحة فعلية ولنبرهن الآن أنها عظمى

نفرض أن $x \notin F \Rightarrow \gamma(x) = 0 \Rightarrow \gamma(x') = (\gamma(x))' = 0' = 1$

$\Rightarrow x' \in F$ ومنه حسب مبرهنة سابقة تكون F عظمى

مبرهنة:

كل مرشحة فعلية F تساوي تقاطع جميع المرشحات (العظمى) الحاوية لها وبالتالي تقاطع جميع المرشحات العظمى في A تساوي $\{1\}$

البرهان:

لتكن $\mathcal{U}_F$ أسرة جميع المرشحات العظمى الحاوية لـ F فإن ① $F \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}_F} U$

لتكن $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_F} U \Rightarrow x \in U$ وذلك مهما يكن $U \in \mathcal{U}_F$ لنفرض أن $G = F \cup \{x'$

إذا كانت G ∧ - متوافقة ⇐ G تعلو رشحة فعلية f_G والتي تحتوي على منوم رشحة U'

وبحيث $x' \in U'$ لكل أن

وهذا يتناقض $F \subseteq G \subseteq U \Rightarrow x \in U' \Rightarrow 0 = x x' \in U'$

لذا إن U منوم رشحة فعلية بالاحرى رشحة فعلية وبالتالي نستنتج أن G تكون ∧ - غير متوافقة

⇐ يوجد $y \in F$ بحيث يكون

$$y x' = 0 \Leftrightarrow y \leq x \Rightarrow x \in F \Rightarrow \bigcap_{U \in \mathcal{U}_F} U \quad (2)$$

ومن الاحتوائين نستنتج ان

$F = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_F} U$ الحالة الثانية واضحة باعتبار أن ١١ هي رشحة فعلية